www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE
DES TECHNIQUES INDUSTRIELLES ET
DES MINES DE DOUAI

CONCOURS D'ADMISSION 1989

MATHEMATIQUES

(Temps accordé : 4 heures)

L'épreuve se compose de deux exercices et d'un problème indépendants.

Elle est paginée de 1/6 à 6/6.

Les candidats originaires des "classes TA" écriront "TA" après leur code d'inscription.

PREMIER EXERCICE

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, muni de la base canonique $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Etant donné un nombre réel α, on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ se traduisant dans $\mathcal{C}$ par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1/ a) Déterminer, selon α, le rang de f.

b) Expliciter, dans les différents cas, une base de l'image et une base du noyau de f.

c) Pour quelles valeurs de α l'image et le noyau de f sont-ils des sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^4$?

Dans la suite, on suppose que α est différent de 0.

On pose $\varepsilon_1 = \lambda e_1 + \alpha e_4$, où λ est un nombre réel, $\varepsilon_2 = e_2$, $\varepsilon_3 = e_3$ et $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$; on appelle F l'image de f.

2/ Déterminer λ pour que $\mathcal{B}$ soit une base de F. Dans la suite, on supposera λ ainsi fixé.

Soit g la restriction de f à F.

3/ Montrer que g est un endomorphisme de F et écrire la matrice B de g dans la base $\mathcal{B}$.

4/ Montrer que g est inversible et écrire la matrice de g^{-1} dans la base $\mathcal{B}$.

5/ Soit h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall i \in \{1,2,3\}, \quad h(\varepsilon_i) = g^{-1}(\varepsilon_i) \\ h \text{ et } f \text{ ont le même noyau.} \end{cases}$$

a) Montrer que ces conditions définissent bien h et écrire la matrice D de h dans $\mathcal{C}$.

b) Déterminer le produit $A\,D\,A$.

Tournez la page S.V.P.

page 260
1989 1 ECOLES NATIONALES SUPERIEURES
des TECHNIQUES INDUSTRIELLES et des MINES DOUAI

DEUXIEME EXERCICE

On se place dans tout cet exercice dans le plan affine euclidien usuel.

Soient Ω et Ω' deux cercles tangents de centres respectifs G et G', de rayons respectifs ρ et ρ' ($\rho' > \rho$). On dit que Ω est intérieur à Ω' si $GG' = \rho' - \rho$, et que Ω est extérieur à Ω', ou que Ω et Ω' sont tangents extérieurement, si $GG' = \rho' + \rho$.

Le but de cet exercice est de construire les cercles tangents à deux cercles donnés tangents extérieurement.

Dans tout l'exercice, Γ et Γ' sont deux cercles tangents extérieurement, de rayons respectifs r et R ($r < R$), de centres respectifs A et B.

Dans la première partie, on établit des constructions géométriques d'un troisième cercle tangent à Γ et à Γ'.

Dans la deuxième partie, on étudie analytiquement l'ensemble des centres des cercles tangents à Γ et à Γ'.

I. - 1/ Réaliser avec soin la figure (1) décrite ci-dessous :

- Γ_0 et Γ'_0 sont deux cercles tangents extérieurement, de rayons respectifs $r_0 = 4$ cm et $R_0 = 6$ cm, de centres respectifs A_0 et B_0.
- M_0 est un point de Γ_0, à la distance 4,5 cm du point de contact de Γ_0 et Γ'_0.
- M'_0 est le point de la demi-droite $[M_0A_0)$ tel que $M_0M'_0 = R_0$.
- C_0 est l'intersection de (A_0M_0) et de la médiatrice du segment $[B_0M'_0]$.

2/ Montrer que le point C_0 ainsi construit est le centre d'un cercle Γ''_0 tangent à Γ_0 en M_0, et à Γ'_0.

Compléter la figure (1) avec Γ''_0.

3/ Déterminer l'ensemble $\mathcal{F}$ des cercles Γ'' tangents à Γ et Γ' et tels que :

Γ est intérieur à Γ'' et Γ' est extérieur à Γ'',
ou Γ est extérieur à Γ'' et Γ' intérieur à Γ'',
ou Γ'' est intérieur à Γ,
ou Γ'' est intérieur à Γ'.

4/ Soit Γ'' un cercle de centre C tangent aux deux cercles Γ et Γ', et n'appartenant pas à $\mathcal{F}$.

Montrer que les tangentes à Γ, Γ' et Γ'' en les points de contact sont concourantes en un point I équidistant des points de contact.

5/ Après avoir choisi un point I_1 sur la tangente commune à Γ_0 et Γ'_0 passant par le point de contact, construire sur une figure (2) un cercle Γ''_1 tangent à Γ_0 et à Γ'_0 et n'appartenant pas à $\mathcal{F}$.

II. - On choisit le repère orthonormé suivant dans le plan :

- l'origine O est le point de contact entre Γ et Γ',
- le premier axe x'Ox est (AB), orienté de telle manière que les coordonnées de A et B sont respectivement $(-r, 0)$ et $(R, 0)$,
- le deuxième axe y'Oy est orthogonal au premier.

1/ Soient (x,y) les coordonnées du centre C d'un cercle Γ'' de rayon ρ, n'appartenant pas à $\mathcal{F}$ (déterminé au I. - 3/) et tangent à Γ et à Γ'.

Exprimer ρ en fonction de x, r et R.

Indication : on pourra distinguer le cas où Γ et Γ' sont intérieurs à Γ'' du cas où Γ et Γ' sont extérieurs à Γ''.

Les élèves des classes TA ne traitent pas les deux questions suivantes.

2/ En déduire que les centres des cercles n'appartenant pas à $\mathcal{F}$, tangents à Γ et à Γ', sont sur une même hyperbole $\mathcal{H}$ dont on précisera le centre, les foyers, les sommets et les asymptotes.

3/ Montrer que les points d'intersection P et P' du cercle de diamètre [AB] et de y'Oy sont sur les asymptotes de $\mathcal{H}$.

Sur une figure (3), représenter $\mathcal{H}$ lorsque $\Gamma = \Gamma_0$ et $\Gamma' = \Gamma'_0$.

Tournez la page S.V.P.

ECOLES NATIONALES SUPERIEURES
des TECHNIQUES INDUSTRIELLES et des MINES DE DOUAI

PROBLEME

Dans tout le problème, I désigne l'intervalle réel $]-1, +1[$, $\mathcal{C}$ l'algèbre des fonctions continues sur I à valeurs réelles, $\mathbb{R}[X]$ l'algèbre des polynômes à coefficients réels ; on notera de la même façon les polynômes et les fonctions polynômes associées.

Pour toute fonction f de $\mathcal{C}$, on définit une nouvelle fonction $T(f)$ sur I par :

$$\forall x \in I,\ (T(f))(x) = 1 + \int_0^x f^2(t)\,dt .$$

I. - 1/ Montrer que pour toute fonction f de $\mathcal{C}$, $T(f)$ est continûment dérivable sur I et croissante.

2/ Soit f un élément de $\mathcal{C}$ ne s'annulant pas sur I ; déterminer les fonctions g de $\mathcal{C}$ vérifiant : $T(g) = T(f)$.

3/ Pour tout nombre entier n strictement positif, on considère la fonction h_n de $\mathcal{C}$ définie par :

$$\begin{cases} \forall t \in [0, \dfrac{1}{n}],\ h_n(t) = n\sqrt{t(1-nt)} \\ \forall t \in]-1, 0[\cup]\dfrac{1}{n}, 1[,\ h_n(t) = 0 \end{cases}$$

a) Etudier les variations de h_n et la représenter graphiquement.

b) Soit t appartenant à I ; déterminer $\lim_{n \to \infty} h_n(t)$.

c) Soit x appartenant à I ; déterminer $\lim_{n \to \infty} (T(h_n))(x)$.

II. - On se propose de résoudre dans $\mathcal{C}$ l'équation :

$$(E) : \quad T(\phi) = \phi$$

1/ Prouver qu'une fonction ϕ de $\mathcal{C}$ est solution de (E) si et seulement si ϕ est continûment dérivable sur I et vérifie le système (S) : $\begin{cases} \phi(0) = 1 \\ \phi' = \phi^2 \end{cases}$

2/ Montrer que si ϕ est une solution de (E), elle vérifie nécessairement :

$$\forall x \in I,\quad \phi(x) > 0 .$$

3/ Montrer que (E) admet dans $\mathcal{C}$ une solution unique que l'on explicitera.

III. - Pour tout nombre entier n strictement positif, on définit l'élément G_n de $\mathbb{R}[X]$ par :

$$G_n(X) = 1 + \sum_{k=1}^{n} X^k$$

1/ Quelle est, pour tout x de I, la limite de $G_n(x)$ quand n tend vers l'infini ?

2/ a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $T(G_n) = G_{n+1} + R_n$, où R_n est un élément de $\mathbb{R}[X]$ que l'on précisera.

b) Soit x un élément de I, déterminer $\lim_{n \to \infty} R_n(x)$

IV. - On définit la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{C}$ par :

$$\begin{cases} P_0 \text{ est le polynôme constant égal à } 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\quad P_{n+1} = T(P_n) \end{cases}$$

1/ a) Expliciter P_1 et P_2.

b) Vérifier que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de $\mathbb{R}[X]$.

2/ Préciser, pour tout nombre entier n, le degré de P_n.

3/ Prouver que, pour tout nombre entier n, tous les coefficients de P_n sont dans l'intervalle $[0,1]$.

4/ Prouver que, pour tout nombre entier n strictement positif, la valuation de $(P_n - G_n)$ est supérieure ou égale à $(n+1)$, où G_n désigne le polynôme défini dans la partie III.

Rappel : la valuation d'un polynôme est le degré du monôme de plus bas degré si le polynôme n'est pas le polynôme nul et vaut $+\infty$ si le polynôme est le polynôme nul.

5/ Soit x un élément de I ; prouver que $|P_n(x) - G_n(x)|$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

6/ En déduire que pour tout x de I, $P_n(x)$ admet, quand n tend vers l'infini, une limite que l'on précisera.

page 262
1997 3
ECOLES NATIONALES SUPERIEURES
des TELECOMMUNICATIONS INDUSTRIELLES et des MINES: DOUAI

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail